Cálculo II
Examen VIII

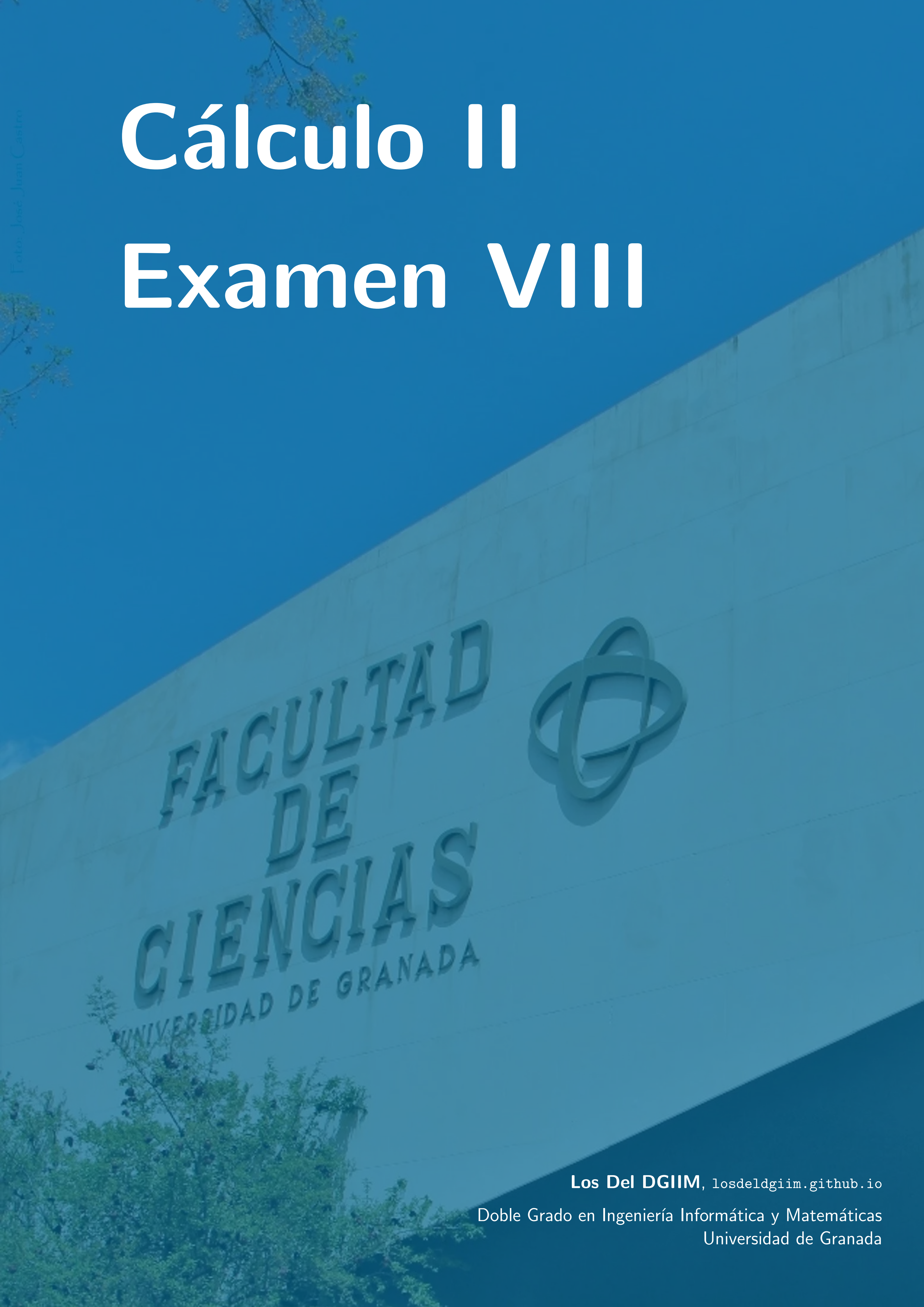

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2017-18.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Primer Parcial. Derivación.

Ejercicio 1. Función uniformemente continua. Teorema de Heine.

Definición 0.1 (Continuidad Uniforme)**.** Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es uniformemente continua si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Teorema 0.1 (Teorema de Heine)**.**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uniformemente continua en* $[a, b] \Longleftrightarrow f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación.

$\Longrightarrow$) Trivialmente, tomando $y = a$, tenemos que f es continua en todo $y \in [a, b]$, por lo que f es continua.

$\Longleftarrow$) Demostramos mediante reducción al absurdo. Suponemos que f es continua pero que no es uniformemente continua.

Por tanto, por no ser uniformemente continua, podemos encontrar $x_n, y_n \in [a, b]$ con $y_n - x_n \to 0$ y $|f(y_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Como x_n, y_n están acotadas, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass podemos encontrar una parcial σ tal que $x_{\sigma(n)} \to x$ y $y_{\sigma(n)} \to y$.

Puesto que $y_n - x_n = 0$ y $y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)} \to y - x$, por la unicidad del límite, concluimos que $y - x = 0 \Longrightarrow x = y$.

Por la continuidad de f, ha de ser que $f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)}) \to f(y) - f(x) = 0$ (por ser $x = y$). Esto, sin embargo, contradice que $|f(y_n)| - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Por tal contradiccón, deducimos que la hipótesis es falsa, y que por tanto f es uniformemente continua.

□

Ejercicio 2. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

1. Sean $f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ dos funciones uniformemente continuas. Entonces $g \circ f$ es uniformemente continua.

   Tenemos que f es uniformemente continua; es decir:

   $$\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon}$$

   Tenemos que g es uniformemente continua; es decir:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\delta} > 0 \mid \text{Si } x, y \in B, \text{ con } |x - y| < \hat{\delta} \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

   En particular, tomando $\hat{\varepsilon} = \hat{\delta}$, y usando que $f(A) \subset B$, la continuidad uniforme de g queda:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{\varepsilon} > 0 \mid \text{Si } f(x), f(y) \in B, \text{ con } |f(x) - f(y)| < \hat{\varepsilon} \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$$

   Uniendo lo que tenemos, queda:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{Si } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \Longrightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| < \varepsilon$$

   Es decir, se ha demostrado que $g \circ f$ es uniformemente continua, por lo que es **cierto**.

2. Toda función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ uniformemente continua está acotada.

   Tomando $f(x) = x$, tenemos que es lipsitchziana por ser $f'(x) = 1$ acotada. Al ser f lipsitchziana, tenemos que f es uniformemente continua.

   No obstante, f no está acotada, por lo que el enunciado es **falso**.

3. Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tiene límite en $+\infty$, es una función acotada.

   Tomando $f(x) = x$, tenemos que es lipsitchziana por ser $f'(x) = 1$ acotada. Al ser f lipsitchziana, tenemos que f es uniformemente continua.

   No obstante, f no está acotada, por lo que el enunciado es **falso**.

4. Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tiene límite en $+\infty$, es una función acotada.

   Por reducción al absurdo, supongamos que f no está acotada. Entonces,

   $$\exists \{x_n\}\ (x_n \in \mathbb{R}^+\ \forall n \in \mathbb{N}) \mid \{|f(x_n)|\} \to +\infty$$

   Como f tiene límite en $+\infty$, se tiene que:

   $$\forall \{x'_n\} \to +\infty\ (x'_n \in \mathbb{R}^+\ \forall n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \{f(x'_n)\} \to L \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, tenemos que $\{x_n\}$ no diverge, por lo que está acotada.

   $$\exists M > 0 \mid |x_n| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Consideramos ahora $f_{]0,M[}$. Como f es uniformemente continua, transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Por tanto, $f(]0, M[)$ está acotado.

   Por tanto, tenemos que $f(x_n) \in f(]0, M[) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f(x_n)$ acotado. Pero como $\{|f(x_n)|\}$ diverge, llegamos a una contradicción.

   Por tanto, f está acotada.

   Observación. Tenemos que $\forall \{x_n\} \to +\infty$, tenemos que la imagen de la cola está acotada por $L + \varepsilon$, y que la imagen de los primeros términos, por ser un conjunto acotado y ser f uniformemente continua, también es uniformemente continua.

5. Toda función integrable tiene una primitiva. Pon un ejemplo.

   Si f fuese continua, es cierto. No obstante, hay función integrables que no son continuas. Ejemplo de esto es la función de las palomitas o la función parte entera. Estas son integrables pero no admiten una primitiva.

   De admitir la función parte entera $E(x)$ una primitiva, tendríamos que $E(x)$ sería la derivada de una función continua, y esto no es posible por ser $E(x)$ discontinua.

Ejercicio 3. Calcula los extremos relativos de la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{t^2(1-t^2)}{e^{t^2}} dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Tenemos que el integrando es una función par y que es localmente integrable, por lo que:

$$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{t^2(1-t^2)}{e^{t^2}} dt = 2\int_{0}^{x} \frac{t^2(1-t^2)}{e^{t^2}} dt$$

Como el intervalo es Riemman Integrable, tenemos que, por el TFC tenemos que:

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{x^2(1-x^2)}{e^{x^2}} = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pm 1$$

Estudiamos la monotonía:

- <u>Para $x < -1$</u>: $F'(x) < 0 \Longrightarrow F(x)$ estrictamente decreciente.
- <u>Para $-1 < x < 0$</u>: $F'(x) > 0 \Longrightarrow F(x)$ estrictamente creciente.
- <u>Para $0 < x < 1$</u>: $F'(x) > 0 \Longrightarrow F(x)$ estrictamente creciente.
- <u>Para $1 < x$</u>: $F'(x) < 0 \Longrightarrow F(x)$ estrictamente decreciente.

Por tanto, tenemos un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Ejercicio 4. Calcula:

1. Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Se pide la integral indefinida:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \left[\begin{array}{c} \cos x = t \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \operatorname{sen} x\, dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{t}}\, dt =$$
$$= \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}\, dt = 2\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt - \int t^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\sqrt{t} - \frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C =$$
$$= 2\sqrt{t} - \frac{2}{5}t\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\cos x} - \frac{2}{5}\cos x\sqrt{\cos x} + C$$

   Por tanto, una primitiva de $f(x)$ es:

$$F(x) = 2\sqrt{\cos x} - \frac{2}{5}\cos x\sqrt{\cos x}$$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x) e^{-2x} dx$

$$\int \operatorname{sen}(x)e^{-2x}dx = \left[\begin{array}{cc} u(x) = e^{-2x} & u'(x) = -2e^{-2x} \\ v'(x) = \operatorname{sen} x & v(x) = -\cos x \end{array}\right] = -\cos xe^{-2x} - 2\int \cos xe^{-2x}\, dx =$$
$$= \left[\begin{array}{cc} u(x) = e^{-2x} & u'(x) = -2e^{-2x} \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \operatorname{sen} x \end{array}\right] = -\cos xe^{-2x} - 2\operatorname{sen} xe^{-2x} + 4\int e^{-2x} \operatorname{sen} x\, dx$$

Por tanto, se trata de una integral cíclica. Tenemos:

$$\int e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^{-2x}}{3} (\cos x + 2 \operatorname{sen} x) + C$$